Probleme und Forscher aus der geometrischen Funktionentheorie

Wirths, Karl-Joachim

Veröffentlicht in:
Jahrbuch 2011 der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft, S.87-95

J. Cramer Verlag, Braunschweig

Probleme und Forscher aus der geometrischen Funktionentheorie*

KARL-JOACHIM WIRTHS

Im Unterdorf 14 A, D-38527 Meine-Abbesbüttel

Dieser Vortrag soll mein Forschungsgebiet, die geometrische Funktionentheorie, an zwei ausgewählten Beispielen vorstellen. Damit die Mathematik nicht zu trocken daherkommt, habe ich solche Probleme ausgesucht, deren Namen mit Forschern verbunden sind, über die man auch ein wenig Interessantes Persönliches erzählen kann. Gleichzeitig werde ich die Gelegenheit nutzen einige Forschungsergebnisse unseres Institutes ansatzweise darzustellen.

Wir sind in der glücklichen Lage für unsere Wissenschaft eine Geburtsurkunde vorweisen zu können. Und die steht auch noch in besonders enger Beziehung zu Niedersachsen. Die geometrische Funktionentheorie entstand aus den revolutionären Ideen von Berhard Riemann in seiner Dissertation. Zunächst ist ja sicher bekannt, dass Bernhard Riemann in Breselenz im Wendland geboren wurde. Man kann dort seit ein paar Jahren auch ein Denkmal für dieses Ereignis bewundern und mir wurde erzählt, dass sich die Kollegen der Hannoveraner Mathematik damals sehr verdient gemacht haben um die Aufstellung dieses Denkmals.

Die Dissertation von Riemann trug den Titel „Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Größe“ und wurde am 14. November 1851 bei der philosophischen Fakultät der Universität Göttingen eingereicht. Worum geht es?

Von Gauß, über den ich hier ja Nichts erzählen muss, stammte der Vorschlag die komplexen Zahlen aufzufassen als Punkte $z = x + iy$ der Ebene, der Gaußschen Zahlenebene, womit er den komplexen Zahlen „das Bürgerrecht im Reich der Mathematik“ verschaffte, wie der Braunschweiger Bürgermeister anlässlich seines goldenen Promotionsjubiläums gesagt haben soll. Riemann war dann der Erste, der systematisch Funktionen von komplexen Veränderlichen mit kom-

* Der Vortrag wurde am 11.02.2011 in der Klasse für Mathematik und Naturwissenschaften der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft gehalten.

plexen Werten $w = f(z)$, also Abbildungen aus einer komplexen Ebene in eine andere, untersuchte. Dabei stellte er die Funktion $f(x + iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ als Summe ihres Realteils u und ihres Imaginarteils v dar, charakterisierte die holomorphen Funktionen durch die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen $u_x = v_y, v_x = -u_y$ und formulierte in seiner oben erwähnten Thesis den Riemannschen Abbildungssatz, der zur Grundlage der geometrischen Funktionentheorie wurde. Im Wesentlichen sagt dieser Satz, dass sich zwei einfach zusammenhängende offene Gebiete der Ebene durch einen umkehrbare holomorphe Funktion aufeinander abbilden lassen. Die Abbildungsfunktion ist eindeutig bestimmt durch die Vorgabe eines Urbildpunktes mit seinem Bildpunkt und die Bedingung, dass die komplexe Ableitung im vorgegebenen Urbildpunkt positiv ist.

Über das weitere Schicksal dieser Promotion berichtet mit Kopien der Originalurkunden ein Bericht von Herrn Remmert im Mathematical Intelligencer, dem „Goldenen Blatt“ der Mathematiker (siehe [12]).

Darin findet sich sowohl der Brief des Dekans, des Professors Ewald, an Carl Friedrich Gauß, in dem er sehr untertänig um die Bewertung dieser Dissertation bittet und die Antwort von Gauß, der die Dissertation zwar lobt, sich im Wesentlichen aber über die für ihn möglichen Zeitpunkte der Verteidigung auslässt. Vielleicht sollte man noch ergänzen, dass der Herr Dekan, der hier so respektvoll mit dem alten Gauß korrespondiert, sein Schwiegersohn war. Herr Ewald gehörte zu den berühmten „Göttinger Sieben“, die wegen ihres Protestes 1837 aus der Göttinger Universität verwiesen wurden. Daher erscheint es verwunderlich, dass Ewald 1851 Dekan in Göttingen war. Weniger bekannt ist, dass es eine Rückholaktion gab und diese im Fall von Ewald und im Fall des mit Gauß zusammenarbeitenden Physikprofessors Weber Erfolg hatte.

Zu der Geschichte des Riemannschen Abbildungssatzes ist zu sagen, dass es an Riemanns Beweisideen zunächst berechtigte Kritik von Weierstrass gab. Es dauerte rund ein halbes Jahrhundert, bis die Beweise dieses Satzes eine mathematisch befriedigende Form gefunden hatten. Diese Ideen sind mit so berühmten Namen wie Hilbert und Carathéodory, Montel und Vitali, Fejér und Riesz verknüpft und deren Geschichte ist einen eigenen Vortrag wert. In den 20er Jahren des vorigen Jahrhunderts war die Sache zu aller Zufriedenheit abgeschlossen. Das war auch die Zeit, in der die Entwicklungen begannen, über die ich im Folgenden berichten möchte.

Wir verdanken Weierstrass einen zweiten Zugang zu der Theorie der holomorphen Funktionen, der darin besteht, dass sich jede holomorphe Funktion in der Nähe eines Punktes z_0, in dem sie holomorph ist, in eine Taylorreihe entwickeln lässt. Diese Reihentwicklung stellt die Funktion in dem größten Kreis, in dem sie holomorph ist, dar. Wenn man das zusammen mit dem Riemannschen Abbildungssatz sieht, schließt sich folgender verlockender Gedankengang an:

Man nehme einen Kreis, z.B. den sogenannten Einheitskreis $\mathbb{D} = \{z \mid |z| < 1\}$, der traditionell inzwischen mit $\mathbb{D}$ von „disc“ bezeichnet wird, und die Reihenentwicklungen aller hierin umkehrbaren holomorphen Funktionen. Dann beherrscht man, geometrisch gesehen, alle einfach zusammenhangenden Gebiete der Ebene. Das stellte sich als ein Langzeitprogramm heraus.

Zunächst kann man sich darauf beschränken einfach zusammenhängende Gebiete bis auf Verschiebungen und Drehstreckungen zu betrachten. Das bedeutet, dass man ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Betrachtungen $f(0) = f'(0) - 1$ voraussetzen kann. Man betrachtet also die im Einheitskreis konvergenten und diesen umkehrbar abbildenden Potenzreihen

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n.$$

Der Erste, der die funktionentheoretisch schwierige Bedingung der Umkehrbarkeit in den Griff bekam, war Ludwig Bieberbach 1916. Er bewies, dass in diesem Fall stets $|a_2| \leq 2$ gilt, dass die durch diese Ungleichung charakterisierten Zahlen alle als zweite Koeffizienten vorkommen und, was das Wichtigste war, dass z.B. $a_2 = 2$ nur für die so genannte Koebe-Funktion

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + \sum_{n=2}^{\infty} n z^n$$

eintritt. Und dann äußerte er in einer Fußnote (siehe [6]) eine Vermutung, die dann lange Zeit als Bieberbachsche Vermutung die Funktionentheoretiker zu immer raffinierteren Theorien anspornte, weil sie einfach zu schön war. *Unter den obigen Bedingungen ist stets* $|a_n| \leq n$ und $a_n = n$ *tritt nur für die Koebe-Funktion ein.*

Damals war Bieberbach Professor in Berlin und seine Schüler und Assistenten beschäftigten sich natürlich mit der Vermutung des Chefs. Einer von diesen war Helmut Grunsky, den ich während einer Lehrstuhlvertretung in Würzburg noch als Emeritus gut kennen gelernt habe. Er erzählte mir, dass ein Assistent von Bieberbach, Karl Löwner, eines Tages ganz aufgeregt zu ihm gekommen sei und ihm sagte, er habe eine Differentialgleichung entdeckt, durch die man im gewissen Sinne die im Einheitskreis umkehrbaren holomorphen Funktionen charakterisieren könne und damit würde er in ganz kurzer Zeit den Beweis der Bieberbachschen Vermutung erbringen. Das glückte ihm zwar im Falle des dritten Koeffizienten, aber dann war Schluss. Das war im Jahre 1923 und vor dem zweiten Weltkrieg wurde auch kein weiterer Koeffizient geknackt.

An dieser Stelle will ich ein wenig über das Schicksal der erwähnten Mathematiker berichten. Bieberbach wurde zu einem glühenden Verehrer des Nationalsozialismus und gründete eine mathematische Zeitschrift, die „Deutsche Mathematik“. Für seine Prominenz in dieser Zeit habe ich ein kleines handfestes Zitat. Mein Vater hat mir in seiner Büchersammlung den Schinken „Deutsche Saat in fremder Erde“ hinterlassen. Dies Buch erschien 1936 und Bieberbach durfte darin „Die deutsche Leistung in der Mathematik“ loben. Ich zitiere daraus nur einen Satz um ihn in seiner vergleichsweise milden Diktion in Beziehung zu setzen zu einem gleich zu zitierenden Brief Biberachs. Er schreibt hier: *Bekannt auch, dass der Eintritt des jüdischen Volkes in die Wissenschaft in dem Augenblick beginnt, da die Emanzipation anfangt, dasselbe von dem Gefühl der Minderwertigkeit zu entlasten.*

Nach dem zweiten Weltkrieg bekam Biberach wegen seines nationalsozialistischen Engagements in Deutschland keine Professur mehr und verlegte sich auf das Verfassen vieler guter mathematischer Bücher. Helmut Grunsky musste Ende der dreißiger Jahre schlechtbezahlt seinen Lebensunterhalt als Redakteur bei dem Referatenorgan „Fortschritte der Mathematik“ fristen. Er zeigte in dieser Eigenschaft damals beachtliche Zivilcourage, als er entgegen den Weisungen Bieberbach lange jüdische Referenten beschäftigte. Der Brief von Bieberbach an Grunsky, der sich darauf bezieht, stammt aus dem Jahr 1938 und zeigt die Radikalisierung doch recht deutlich (siehe [13]). Darin heißt es: *Die Durchsicht der bisher erschienen Hefte des Jahrgangs 1936...zeigt eine große Zahl an Juden vergebener Referate....Ich betone erneut, dass Sie Ihren Referentenstab nach den Richtlinien zusammensetzen müssen, die seit dem 30. Januar 1933 für jeden Deutschen verbindlich sind. Sie laufen jedenfalls Gefahr, dass Ihr Handeln als mangelnder politischer Instinkt ausgelegt werde.*

Karl Löwer war beim Einmarsch der deutschen Truppen in Prag dort Professor, wurde wegen seiner jüdischen Herkunft sofort verhaftet, konnte aber durch Zahlung einer großen Summe die Ausreise für sich und seine Familie erreichen und brachte es in Amerika zum Professor in Stanford.

Auf den Arbeiten von Helmut Grunsky basierte der in den 50er Jahren gefundene Beweis für den vierten, der in den 60er Jahren gefundene Beweis für den sechsten und der in den 70er Jahre gefundene Beweis für den fünften Koeffizienten.

Dann jedoch war die Zeit reif für den endgültigen Beweis von Louis de Branges in den 80ern, den er in Zusammenarbeit mit den Russen Lebedev und Milin fand. Ich hatte damals die Freude Herrn de Branges, einen sehr sympathischen Mathematiker, einen Tag lang durch die Sehenswürdigkeiten Würzburgs zu führen und ihn ein wenig persönlich kennen zu lernen. Er ist, das deutete sich damals schon an, eine ein wenig tragische Gestalt. Er war von Hause aus kein Funktionentheoretiker, sondern die Erkenntnisse, die ihn zu dem Beweis führten, kamen aus der Funktionalanalysis. Es ist dazu zu sagen, dass sein Beweis eigentlich dann erst allgemein anerkannt wurde, als Funktionentheoretiker ihn so reduzierten, dass schon Bieberbach ihn hätte verstehen können. De Branges erzählte mir damals, dass der Springer-Verlag ihn gebeten hätte ein Buch über seinen Beweis zu schreiben, ihn aber aufgefordert habe den Beweis von aus seiner Sicht wichtigen funktionalanalytischen Sachverhalten zu befreien. Das habe er empört abgelehnt. Seine Arbeit aus den Acta Mathematica darüber wird in diesem Zusammenhang zwar immer zitiert, aber die in den Lehrbüchern benutzten Beweise stammen nur auf Umwegen daher. Seine Tragik setzt sich bis heute fort, da er und auch Schüler von ihm beharrlich im Internet Beweisideen zu der berühmten Riemannschen Primzahlvermutung veröffentlichen, die, bis jetzt jedenfalls, von der Fachwelt abgeschmettert wurden. Man sollte dazu wissen, dass diese Vermutung zu den Problemen gehört, deren Lösung von der American Mathematical Society mit der Zahlung von einer Million Dollar honoriert wurde. De Branges war von einer seiner Lösungen so überzeugt, dass er schon den ja durchaus ehrenwerten Verwendungszweck dieser Million angab. Er wollte das in der französischen Revolution zerstörte Schloss seiner Vorfahren als mathematisches Tagungszentrum wieder aufbauen.

Bei der Euphorie über das gelöste Problem geriet ein wenig aus dem Blickfeld, dass er viel mehr bewiesen hatte, nämlich die Rogosinski-Vermutung: *Man nehme das Bild, dass eine wie eben normierte umkehrbare holomorphe Funktion vom Einheitskreis entwirft und betrachte irgendeine im Einheitskreis holomorphe Funktion, die Null auf Null abbildet und deren Bild des Einheitskreises in dem eben erwähnten Bild liegt. Dann gilt für die Taylorentwicklung dieser Funktion im Nullpunkt ebenfalls* $|a_n| \leq n$.

Die Frage, ob etwas ähnlich Schönes wie die Bieberbach-Rogosinski Abschätzung herauskommt, wenn man einige der Vorgaben fallen lässt, die hier gemacht wurden, treibt meinen Freund Farit Avkhadiev aus Kazan, der seit mehr als zehn Jahren fast jedes Jahr hier dank Stipendien der Deutschen Forschungsgemeinschaft arbeitet, und mich nun schon lange um. Was Schönheit ist, das liegt dabei, wie schon David Hume bemerkt hat, allerdings im Auge des Betrachters und den dürfen Sie gleich spielen. In der allgemeinsten Form sieht die Frage dann so aus:

Man nehme zwei Gebiete A, B in der komplexen Ebene und eine in A holomorphe Funktion, bei der das Bild von A in B liegt und die einen vorgegebenen Punkt von A, genannt z_0*, in einen vorgegebenen Punkt, genannt* w_0*, von B abbildet, sowie die Taylorentwicklung dieser Funktion in* z_0*. Was kann man über die Größe der Koeffizienten* $a_n(A,B,z_0,w_0)$ *sagen?*

Es ist klar, dass die Abschätzungen von der Lage der Punkte abhängen müssen. Einen vernünftigen Lageparameter hat man im Falle einfach zusammenhängender Gebiete. Es ist der konforme Radius des Gebietes A in z_0, genannt $R_A(z_0)$. Den berechnet man, indem man die nach dem Riemannschen Abbildungssatz existierende holomorphe umkehrbare Abbildung Φ von D auf A hernimmt, Null auf z_0 abbildet und für diese $\Phi'(0) = R_A(z_0)$ setzt. Damit sehen die Abschätzungen, wie man beweisen kann, immer so aus:

$$|a_n(A, B, z_0, w_0)| \leq C_n \frac{R_B(w_0)}{R_A(z_0)^n}$$

und für die Großen C_n bekommt man z.B. um nur einige der in unseren Augen schönsten Ergenisse zu zitieren:

Wenn A und B einfach zusammenhängend sind, ist $C_n \leq 4^{n-1}$.

Wenn A einfach zusammenhängend und B konvex ist, dann ist

$C_n \leq \binom{2n-1}{n}$

Wenn A und B beide konvex sind, ist $C_n < 2^{n-1}$.
Wenn A konvex und B einfach zusammenhängend ist, ist

$C_n \leq (n + 1)2^{n-2}$.

Die oberen Schranken werden in jedem Fall angenommen (siehe [2]). Über weitere Detailforschungen an solchen Problemen, die bei nicht einfach zusammenhängenden Gebieten zunehmend schwieriger werden, möchte ich hier nicht berichten, sondern noch einen zweiten unserem Institut am Herzen liegenden Problemkreis anschneiden.

Dabei geht es, grob gesagt, um die „Größe des Bildgebietes" $f(\mathbb{D})$, wenn f holomorph im Einheitskreis ist. Wie man an den Funktionen $f(z) = az$ sieht, ist diese Frage zu naiv. Die Bilder $f(\mathbb{D})$ sind Kreise mit dem Radius $|a|$, werden also beliebig klein.

Wenn man jedoch nur an einer Stelle eine Normierung, z.B. $f'(0) = 1$ verlangt, dann enthäalt $f(\mathbb{D})$ auf jeden Fall Kreise, deren Radius oberhalb einer bis heute unbekannten Schranke liegt. Ja, es befinden sich im Bildgebiete sogar schlichte Kreise, deren Radius oberhalb einer positiven Schranke liegt. Schlicht wird ein Kreis genannt, wenn in seinem Urbild unter f keine Nullstelle der Ableitung von f liegt. Diese Tatsache war eine sehr überraschende Entdeckung von André Bloch im Jahre 1924 (siehe [4] und [5]). Und diese unbekannte Schranke heißt daher die Blochsche Konstante.

Jetzt darf ich vielleicht als Erholung von der Mathematik ein wenig über das Schicksal eines der ungewöhnlichsten Mathematiker erzählen. André Bloch wurde 1893 geboren und 1914 im Ersten Weltkrieg eingezogen ebenso wie sein Bruder Georges. Beide wurden schon nach einigen Monaten schwer verwundet und nicht mehr an die Front geschickt. 1917 ermordete André Bloch diesen Bruder, seine Tante und seinen Onkel mit einem Messer. Wegen der Kopfverletzung, die er im Krieg erlitten hatte, wurde er für nicht zurechnungsfähig erklärt und in das Irrenhaus Maison de Charenton in Paris eingeliefert. Dort verbrachte er die 31 Jahre bis zu seinem Tode 1948 vollkommen zufrieden mit sehr erfolgreichen Forschungen. Er verfasste Artikel, studierte Bücher und korrespondierte mit Kollegen. Über seine Lebensumstände wusste fast niemand Bescheid, allerdings gab es die wildesten Gerüchte. Diese Geschichte wurde auch erst in den 80er Jahren aufgeklärt, als ein amerikanischer Mathematiker in unserem oben genannten Klatschblättchen, dem „Mathematical Intelligencer" einen Artikel mit dem Titel „ Beauty and the beast: The strang case of André Bloch" ([10]) veröffentlichte, in dem er diese sehr divergierenden Gerüchte dem Publikum zur Kenntnis gab. Das veranlasste Henri Cartan und Jacqueline Ferrand 1988 zu einer Veröffentlichung „The case of André Bloch" ([9]) im selben Blatt, in dem sie die wahre Geschichte erzählten. Darin geben sie auch wenigstens eine Vermutung ab über das Mordmotiv. Sie stützt sich auf ein Buch eines Arztes im Maison de Charenton, in dem er ohne Namensnennung von dem „Mathematiker von Charenton" berichtet. Er habe erzählt in seiner Familie gäbe es einen geistigen Defekt, deshalb gebiete es die Logik diese auszurotten.

Nach diesen Gruselgeschichten wieder ein wenig Mathematik:

Schwierig ist es eine untere Abschätzung für die Blochsche Konstante zu finden, denn dabei muss man beweisen, dass ein schlichter Kreis mit dem besagten Radius immer in das Bildgebiet passt. Im Prinzip einfacher ist es eine obere Abschätzung anzugeben, denn dazu braucht man nur bei einer geeigneten Funktion den größten schlichten Kreis auszurechnen, der ins Bildgebiet passt. Aber um eine **gute** obere Abschätzung zu finden, dazu braucht man mathematische Intuition:

Die hatten Helmut Grunsky und Lars Valerian Ahlfors im Jahre 1936 (siehe [3]). Sie hatten die Idee, die nur aus einer ästhetischen Betrachtungsweise herrühren kann, dass die Situation möglichst symmetrisch und die Ableitungsordnungen in den Ableitungsnullstellen der Abbildungsfunktion möglichst gering sein sollten. Das verwirklichten sie, indem sie im Urbild ein symmetrisches Kreisbogendreieck in den Einheitkreis legten und das in ein gleichseitiges Dreieck abbildeten. Wenn man im Urbild einmal um einen Eckpunkt herumläuft, muss man im Bild zweimal um den entsprechenden Eckpunkt laufen. Das entspricht einer einfachen Ableitungsnullstelle in den Eckpunkten und der größte schlichte Bildkreis ist der Umkreis des gleichseitigen Dreiecks. Das ergibt eine obere Abschätzung für die Blochsche Konstante von 0,472. Wenn Sie bedenken, dass das bis heute die beste obere Schranke ist, bleibt einem nur Bewunderung für diese mathematische Intuition. Insofern spricht einiges für die von den Beiden geäußerte Vermutung, dass dieser Wert der Richtige ist.

Der geniale Funktionentheoretiker Ahlfors schaffte es dann ein Jahr später dem unbekannten richtigen Wert auch von unten sehr nahe zu kommen (siehe [1]). Er bewies, dass die Blochsche Konstante größer oder gleich $\sqrt{3}/4 = 0{,}43..$ ist. Wenn ich jetzt erwähne, dass Maurice Heins erst 1962 bewies, dass man hier $\geq$ durch $>$ ersetzen kann (siehe [11]), sehen Sie wie klein die Fortschritte in der Mathematik manchmal sind.

1988 hat Mario Bonk in unserem Institut seine Dissertation „Extremalprobleme bei Blochfunktionen" angefertigt, in der er beweisen konnte, dass die Blochsche Konstante $> \sqrt{3}/4 + 10^{-14}$ ist (siehe [7]). Als er in dem mathematischen Forschungsinstitut in Oberwolfach darüber vortrug, erzählte der Kollege Pommerenke aus Berlin, dass er damals zu Herrn Heins gesagt habe, der Fortschritt von $\geq$ zu $>$ sei eindeutig der kleinste Fortschritt in der Geschichte der Mathematik. Heute, so sagte er, habe er nun den zweitkleinsten Fortschritt in der Geschichte der Mathematik erlebt. Es hat dann noch einige ähnliche Verbesserungen gegeben, aber die Ahlfors-Grunsky Vermutung ist bis heute unbewiesen.

Aber wie üblich, gibt es natürlich andere Varianten des Problems und eine davon hat Herr Bonk, als er 2000 als Heisenberg-Stipendiat unseres Instituts in Amerika war, mit Herrn Ermenko zusammen geknackt. Dabei betrachtet man Funktionen, die in der ganzen Ebene holomorph bis auf Pole sind und sucht die größte schlichte Kreisscheibe im Bildgebiet, das man sich auf der so genannten Riemannschen Zahlenkugel, einer stereographischen Projektion der Ebene auf eine Kugel, vorstellt.

Die Extremalfunktion hat in diesem Fall auch eine schöne geometrische Gestalt. Diesmal stellt man sich in der Urbildebene ein hexagonales Netz von gleichseitigen Dreiecken vor und beschreibt der Riemannschen Zahlenkugel einen regelmäßigen Tetraeder ein, den man, diesmal mit Zentralprojektion vom Mittelpunkt aus, auf die Kugel projiziert. Dabei stoßen an jeder Ecke im Bild drei Kugeldreiecke zusammen. Also entspricht ein Umlauf um eine Ecke im Urbild wieder zwei Umläufen im Bild. Die Idee, diese Abbildung in diesem Zusammenhang zu betrachten, stammt wohl von Herrn Pommerenke aus dem Jahre 1970. Wenn man den Radius der größten schlichten Kreisscheibe im Winkelmaß auf der Kugel misst, dann kommt für die meromorphe Blochkonstante arccos(1/3) heraus. Und soviel schlichte Kreisscheibe passt immer ins Bild (siehe [8]).

Als Abschlussbemerkung darf ich noch anmerken, dass Herr Bonk unser Beitrag zum Brain drain ist, er ist inzwischen full professor an der Universität Los Angeles.

References

[1] Ahlfors, L.V. (1938): An extension of the Schwarz's Lemma. Trans. Amer. Math. Soc. **43**: 359–364.

[2] Avkhadiev, F.G. & K.-J. Wirths (2009): Schwarz-Pick type inequalities. Birkhäuser.

[3] Ahlfors, L.V. & H. Grunsky (1937): Über die Blochsche Konstante. Math. Z. **42**: 671–673.

[4] Bloch, A. (1924): Les theoremes de M. Valiron sur les fonctions entieres et la theorie de l'uniformisation. C.R. Acad. Sci. Paris **178**: 2051–2052.

[5] Bloch, A. (1925): Les theoremes de M. Valiron sur les fonctions entieres et la theorie de l'uniformisation. Ann. Sci. Univ. Toulouse **17**: 1–22.

[6] Bieberbach, L. (1916): Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitkreises vermitteln. Sitz.-Ber. Preuss. Akad. Wiss., 940–950.

[7] Bonk, M. (1988): Extremalprobleme bei Bloch-Funktionen. Dissertation, Braunschweig.

[8] Bonk, M. & A. Eremenko (2000): Covering properties of meromorphic functions, negative curvature and spherical geometry. Ann. Math. **152**: 551–592 .

[9] Cartan, H. & J. Ferrand (1988): The case of Andre Bloch. The Mathematical Intelligencer **10.1**: 23–26.

[10] Campbell, D.M. (1985): Beauty and the Beast: The strange case of Andre Bloch. The Mathematical Intelligencer **7.4**: 36–38.

[11] Heins, M. (1962): On a class of conformal metrics. Nagoya Math. J. **21**: 1–60.

[12] Remmert, R. (1993): The Riemann-file Nr. 125 of the Philosophische Fakultät of the Georgia Augusta at Göttingen. The Mathematical Intelligencer **15.3**: 44–46.

[13] Roth, O. & St. Ruscheweyh (Herausgeber) (2004): Helmut Grunsky, Collected Papers. Heldermann Verlag, pp. XLVII,XLVIII.